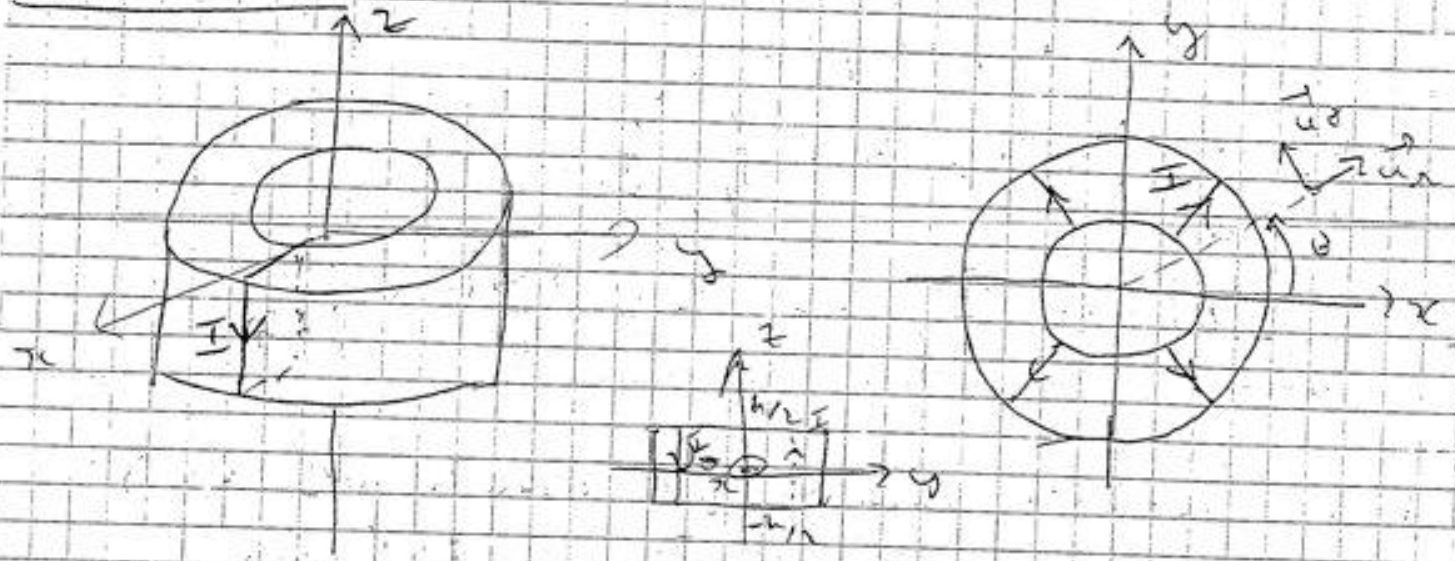


Induction

Exercice 1



1) Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \perp$ à ces plans, donc

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta \quad r = \text{distance à l'axe de la toro}$$

Soit $\mathcal{C}(r, z)$ un cercle de rayon r centré sur Oz ,

$$\oint_{\mathcal{C}(r, z)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'extérieur de la toro} \\ \pm I & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'intérieur} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{B} &= \frac{N \mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta && \text{à l'intérieur} \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \\ & && R_1 \leq r \leq R_2 \\ &= \vec{0} && \text{à l'extérieur} \end{aligned} \right.$$

Φ = flux du champ \vec{B} à travers le circuit

$$\begin{aligned} &= N \times \text{flux à travers une spire} \\ &= \frac{N \mu_0 I}{2\pi} \iint_{\text{section}} \frac{d^2 \Sigma}{r} = \frac{N \mu_0 I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = LI \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| L = \frac{N^2 \mu_0 h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi} \right.$$

Énergie des charges magnétiques:

$$E = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2\mu_0} \iint \vec{B} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2\mu_0} \iint_{\text{intérieur de la tore}} B^2 dV$$

intégrale sur tout l'espace

$$= \frac{\mu_0^2}{2\mu_0} \frac{N^2 I^2}{4\pi} \times h \times 2\pi \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} r dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 N^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi}$$

2) Soit à l'intérieur dans le fil (courant selon \vec{u}_z)

Le champ créé par le fil est $\vec{B}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$,

le flux de \vec{B}_{fil} dans la tore est

$$\phi_{\text{B dans la tore}} = N \times \int_{\text{une spire}} \vec{B}_{\text{fil}} \cdot \vec{u}_e dS$$

$$= \frac{N \mu_0 I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{N \mu_0 I h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi}$$

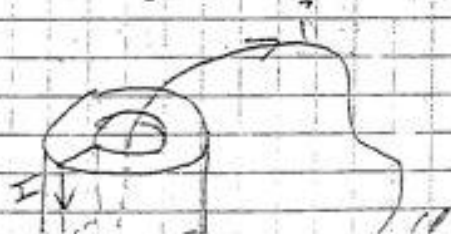
$$= M I$$

$$\Rightarrow M = \frac{N \mu_0 h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi} = \frac{L}{N}$$

3) Ici, pour calculer M on va calculer le flux de \vec{B}_{tore} (car \vec{B}_{fil} est inconnu).

Si le fil ne passe pas à l'intérieur de la tore, $M=0$.

Soit, regardons la configuration suivante:

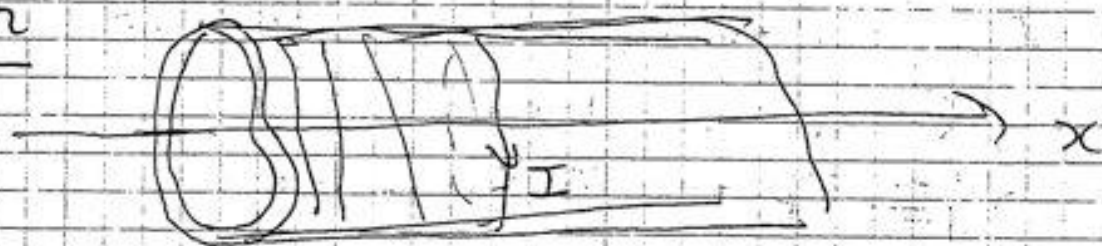


Pour calculer le flux de \vec{B} par \vec{a} travers \mathcal{C} , on peut $\textcircled{2}$ considérer une importante surface s'appuyant sur \mathcal{C} , on prend une surface qui coupe le tore selon une section rectangulaire (c'est toujours possible) :

$$\Phi_{\vec{F} \rightarrow \vec{C}} = MI = \frac{N \mu_0 I}{2\pi r} \iint \frac{dr dz}{r} = \frac{N \mu_0 I h}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{L}{N}} \text{ indépendamment de la forme du fil}$$

Exercice 2



$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_x \text{ dans le solénoïde (cf cours)}$$

$$= \vec{0} \text{ à l'extérieur}$$

$$\Phi = L I = \underbrace{\mu_0 I S n l}_{\text{flux dans une portion de longueur } l} = \underbrace{\mu_0 n^2 l S}_{\text{flux dans une spire}} I$$

$$\boxed{L = l \mu_0 n^2 S}$$

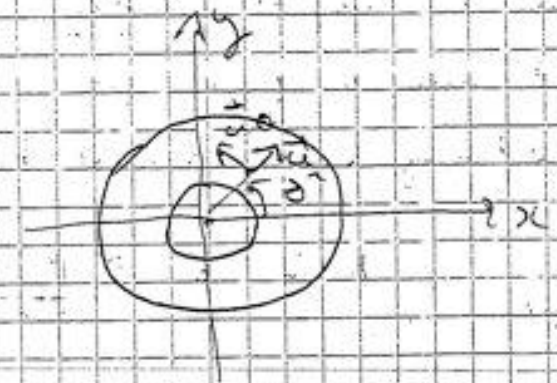
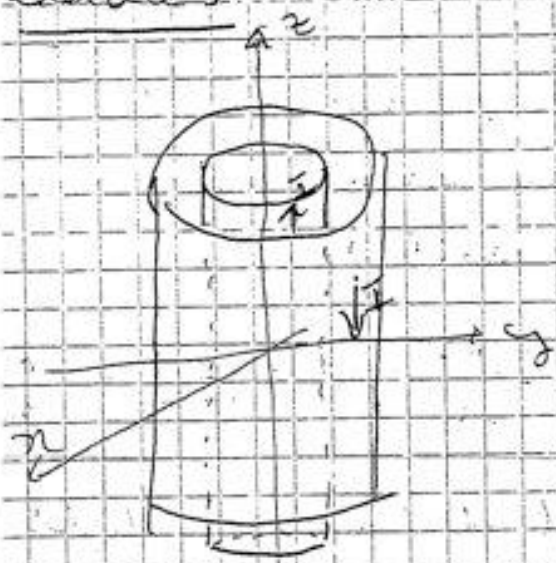


Même idée qu'à l'exercice 1 :

$$\Phi_{\text{sol} \rightarrow \text{fil}} = \mu_0 I S = MI$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{L}{n l} = \mu_0 S}$$

Exercice 3.



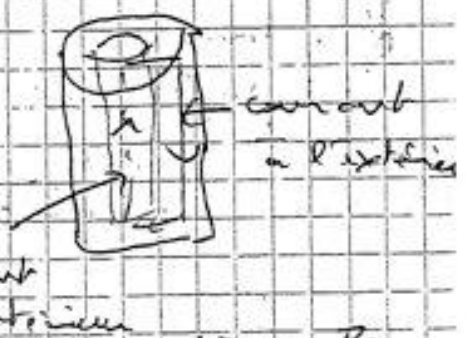
Champ magnétique créé par le câble: symétrie + th. d'Ampère

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } R_2 \leq r \leq R_1 \\ 0 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = \mu I = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

per unité de longueur

Le câble coaxial est fermé "à l'infini".



Le flux à travers l'un de ces circuits est $\frac{\mu_0 dI}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, lorsque l'on tient compte de tous les circuits formés sur le câble on obtient $\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

Donc

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Pour l'énergie: $\frac{1}{2} L I^2 = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV$ en même calcul que l'exercice 1

Pour calculer la capacité on charge par ex. l'armature intérieure $\bar{a} + \lambda$ et l'armature extérieure $\bar{a} - \lambda$ (charges par unité de longueur)

Symétrie $\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

Gauss $\Rightarrow \int \vec{u}_r E(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$

Donc $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$

$V_{int} - V_{ext} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{C}$

$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ capacité par unité de longueur

$LC = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ constante universelle indépendante de R_1 et R_2 .
↑ vitesse de la lumière

Exercice 4



NCC d (mais pas NCC R!)

Champ créé par la grande spire sur son axe :

$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_z$

(similaire aux feuilles magnétiques I, exercice 7 voir aussi cours)

Comme NCC d, on peut supposer B_{\perp} constant au niveau de C_2

$\Phi_{1-2} = M I = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{3/2}} \pi R^2$

$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 \pi R^2}{2R \left(1 + \frac{d^2}{R^2}\right)^{3/2}}$

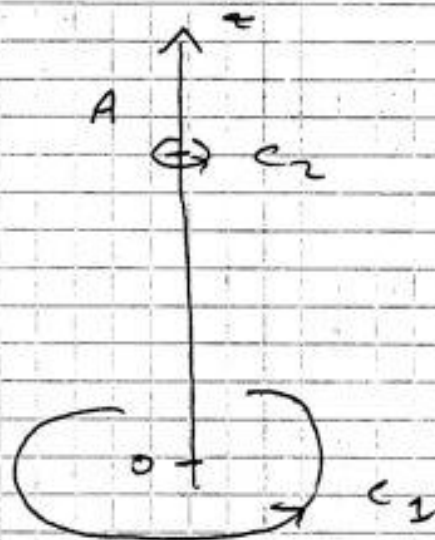
Exercice 4 : calcul du flux du champ de C_2 à travers C_1 sans utiliser la notion de potentiel vecteur \vec{A} . ⑥

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \, d^2 \Sigma$$

\vec{B}_2 = champ dipolaire

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{AM}|^3} \left(-\vec{\mu} + 3 \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AM}|^2} \vec{AM} \right)$$

$$\vec{\mu} = I \pi r^2 \vec{u}_z$$



Pour calculer $\Phi_{2 \rightarrow 1}$, on peut prendre n'importe quelle surface Σ appuyant sur C_1 . Dans le cas présent, on a 2 choix simples :

a) Σ_1 = disque entouré par le circuit C_1

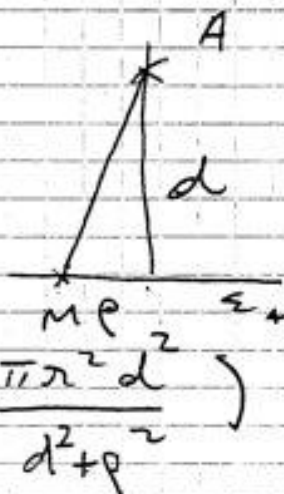
b) Σ_2 = coquille sphérique de bord C_1 , et de centre A.

Faisons le calcul en utilisant ces 2 surfaces (bien sûr on doit obtenir le même résultat dans les deux cas !)

a) $\vec{n} = \vec{u}_z$ dans ce cas.

$$\vec{AM} \cdot \vec{u}_z = -d$$

$$\vec{B}_2 \cdot \vec{n} = \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi (d^2 + r^2)^{3/2}} \left(-\pi r^2 + \frac{3\pi r^2 d}{d^2 + r^2} \right)$$



$$\phi_{2-1} = \frac{\mu_0 n^2 I_2 \pi}{4} \int_0^R dp \rho \frac{1}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \left[-1 + \frac{3d^2}{d^2 + \rho^2} \right]$$

$$= M I_2$$

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 n^2 \int_0^{R/d} \frac{du \cdot u}{(1+u^2)^{3/2}} \frac{d^2}{d^3} \left[-1 + \frac{3}{1+u^2} \right]$$

on pose $\rho = du$ dans
l'intégrale

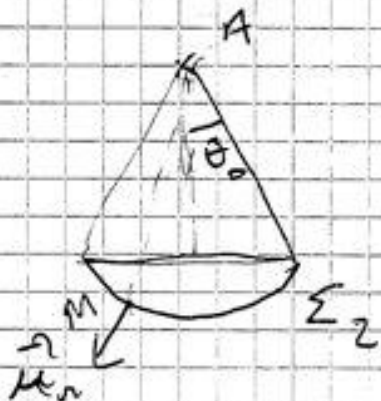
$$= \frac{\pi \mu_0 n^2}{2d} \int_0^{R/d} \left[\frac{-u}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{3u}{(1+u^2)^{3/2}} \right] du$$

$$= \frac{\pi \mu_0 n^2}{2d} \left[(1+u^2)^{-1/2} - (1+u^2)^{-3/2} \right]_0^{R/d}$$

$$= \frac{\pi \mu_0 n^2}{2d} \frac{1}{\sqrt{1+R^2/d^2}} \left[1 - \frac{1}{1+R^2/d^2} \right]$$

$$= \frac{\pi \mu_0 n^2}{2d} \frac{R^2/d^2}{(1+R^2/d^2)^{3/2}} = \frac{\pi \mu_0 n^2}{2R} \frac{1}{(1+d^2/R^2)^{3/2}}$$

b)



Si on veut calculer le flux à travers la coquille sphérique Σ_1 , il est naturel d'utiliser les coordonnées sphériques de centre A. L'expression du

champ dipolaire dans ces coordonnées est

$$\vec{B}_v(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi |\vec{AM}|^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (7)$$

$$\mu = I_2 \pi^2 \frac{1}{\pi}$$

$\vec{n} = -\vec{u}_r$ normale à Σ_2 (en tenant compte de l'orientation du contour C_2)

$$\vec{B}_v \cdot \vec{n} = - \frac{\mu_0 I_2}{4} \times \frac{2 \cos \theta}{|\vec{AM}|^3}$$

$$\frac{R}{d} = \tan \theta_0, \quad |\vec{AM}|^2 = d^2 + R^2$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_v \cdot \vec{n} \, d\Sigma = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 I_2}{(d^2 + R^2)^{3/2}} \iint \cos \theta$$

$$(d^2 + R^2) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

élément de surface
sphérique

$$= -\frac{1}{2} \mu_0 I_2 \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}} \times 2\pi \int_{\pi - \theta_0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

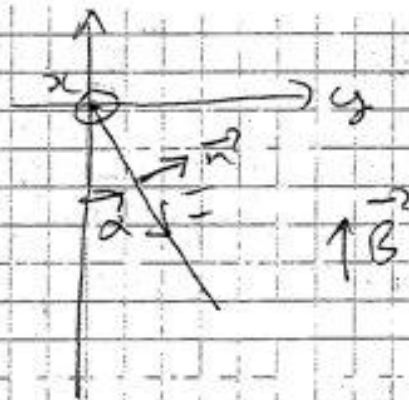
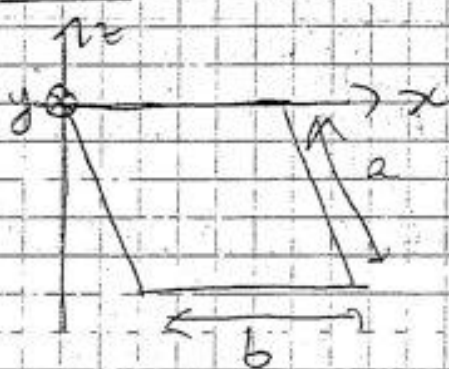
$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 I_2 \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}} \sin^2(\pi - \theta_0) \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_{\pi - \theta_0}^{\pi}$$

$$\sin^2(\pi - \theta_0) = \sin^2 \theta_0 = \frac{R^2}{R^2 + d^2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\pi}{2} \mu_0 I_2 \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\pi \mu_0 I_2}{2R} \frac{1}{(1 + d^2/R^2)^{3/2}}$$

On retrouve à nouveau le même résultat.

Exercice 5



$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= -\dot{\Phi} & \Phi &= \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot l & \vec{B} &= B \vec{u}_z \\
 \text{angle } \vec{a} &= \cos \alpha & \uparrow & \text{surface de coupe} & & = ab \\
 \vec{n} &= \sin \alpha \vec{u}_z + \cos \alpha \vec{u}_y & & & & \\
 \vec{B} \cdot \vec{n} &= B \sin \alpha & & & &
 \end{aligned}$$

$$Q = \underbrace{-I a l B \sin \alpha}_{\text{énergie de interaction dans } \vec{B}} - \underbrace{\frac{1}{2} m g a \cos \alpha}_{\text{énergie potentielle de pesanteur}}$$

Position d'équilibre: $\frac{dQ}{d\alpha} = 0 = -I a l B \cos \alpha + \frac{1}{2} m g a \sin \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{2 I l B}{m g}$$

On suppose (sans perte de généralité) que $B > 0$
 $I > 0$

On a 2 solutions: l'une α_1 / $0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$
l'autre $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$



$$\frac{d^2 Q}{d\alpha^2} = I a l B \sin \alpha + \frac{1}{2} m g a \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} m g a \cos \alpha \left[1 + \frac{2 I l B}{m g} \tan \alpha \right]$$

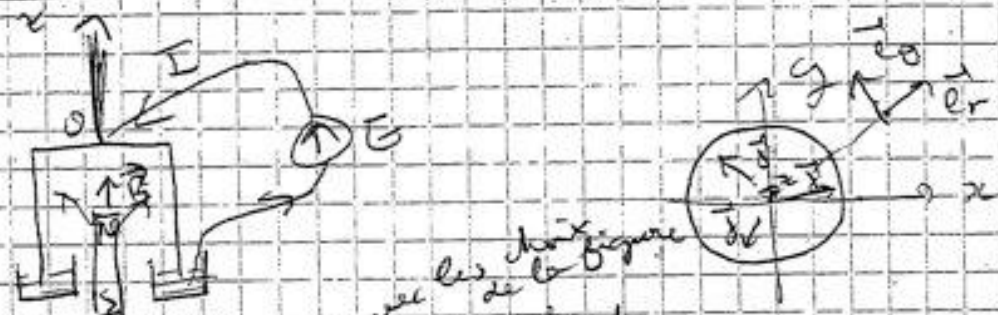
$$\frac{d^2 Q}{d\alpha^2} (\alpha = \alpha_i) = \frac{1}{2} m g a \cos \alpha_i \underbrace{\left[1 + \left(\frac{2 I l B}{m g} \right)^2 \right]}_{> 0}$$

équilibre stable $\Leftrightarrow \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha_i > 0$

$\cos \alpha_1 > 0 \Rightarrow$ stable

$\cos \alpha_2 < 0 \Rightarrow$ instable

Exercice 6



1^{re} méthode : énergie

avec les deux figures de la figure
angle de rotation de la boîte

$$\delta W = I d\phi = - \frac{I \phi d\phi}{2\pi}$$

↑
travail des forces é.m.

$$= \tau d\theta \Rightarrow \tau = \frac{-I \phi}{2\pi}$$

↑
couple

$$\tau = \frac{-I \phi}{2\pi}$$

2^{de} méthode : calcul "barycentrique"

$$d\vec{P} = \vec{j} \times \vec{B} d^2\Sigma$$

↑ courant surfacique sur la boîte

$$d\vec{\Gamma}_0 = \vec{OM} \times d\vec{P} = \vec{OM} \times (\vec{j} \times \vec{B}) d^2\Sigma$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\text{boîte}} d\vec{\Gamma}_0 \Rightarrow \tau = \vec{\Gamma}_0 \cdot \vec{u}_z$$

• Contribution de la partie supérieure de la boîte

$$\vec{OM} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{j} - (\vec{OM} \cdot \vec{j}) \vec{B}$$

$$d\vec{\Gamma}_0 \cdot \vec{u}_z = - (\vec{OM} \cdot \vec{j}) \vec{B} \cdot \vec{u}_z = - n j r B_z$$

$$\int_{\text{partie circulaire supérieure de la boîte}} - n j r B_z r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^r I n B_z dr d\theta = - \frac{I \phi_z}{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} j r dr d\theta = I$$

B indépendant

$\phi_z =$ flux de \vec{B} à travers la partie supérieure de la boîte

↳ Contribution des côtes cylindriques de la boîte :

$$d\vec{\sigma} \cdot \vec{u}_z = \left[(\vec{OM} \cdot \vec{B}) (\vec{j} \cdot \vec{u}_z) - \frac{(\vec{OM} \cdot \vec{j}) B_z}{2\pi} \right] d^2\Sigma$$

$$\vec{j} = j_z \vec{u}_z + j_\theta \vec{u}_\theta, \quad \Gamma = - \int_0^{2\pi} j_\theta R d\theta$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{j} = z j_z \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \iint_{\text{partie cylindrique}} \vec{OM} \cdot \vec{j} B_z d^2\Sigma &= \iint z j_z(z, \theta) B_z(z) dz R d\theta \\ &= -i \int z B_z(z) dz \end{aligned}$$

$$\iint_{\text{partie cylindrique}} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) j_z d^2\Sigma = \iint_{\text{partie cyl}} (z B_z j_z + R B_\theta j_z) d^2\Sigma$$

compense la
forme ci-dessus

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\text{partie cylindrique}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{u}_z &= \iint_{\text{partie cylindrique}} R B_\theta j_z d^2\Sigma \\ &= R \int dz \int R d\theta j_z B_\theta(z) \\ &= -R \Gamma \int dz B_\theta(z) \quad \text{indépendant de } \theta \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \phi_{\text{cyl}} \leftarrow \text{flux de } \vec{B} \text{ à travers} \\ &\quad \text{la partie cylindrique} \end{aligned}$$

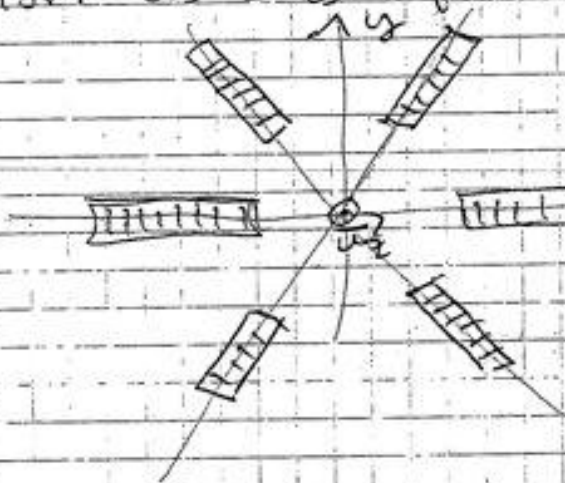
Finalement,

$$\Gamma = -\frac{\Gamma}{2\pi} (\phi_z + \phi_{\text{cyl}}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \phi$$

flux total à
travers la boîte.

Exercice 7

Pour créer un champ uniforme tournant, on utilise par ex. un courant triphasé alimentant des bobines dont les axes font des angles de $\frac{2\pi}{3}$.



Le champ au centre est $\vec{B} = B(\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$
cf. Magnétostatique I
exercice 7

L'aimant subit un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}$ et va donc se mettre à tourner.

Si on suppose $\vec{M} = M(\cos(\omega_0 t - \varphi) \vec{u}_x + \sin(\omega_0 t - \varphi) \vec{u}_y)$,

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{M} \times \vec{B} = MB [\cos(\omega_0 t - \varphi) \sin \omega t - \sin(\omega_0 t - \varphi) \cos \omega t] \vec{u}_z \\ &= \Gamma(t) \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\Gamma(t) = MB \sin[(\omega - \omega_0)t + \varphi]$$

Évidemment $\Gamma(t) = 0$ sauf si $\omega = \omega_0$. Dans ce cas Γ est constant et peut donc compenser un couple résistant pour entretenir la rotation de l'aimant: "vitesse synchrone".
Le mieux est de prendre $\varphi = \frac{\pi}{2}$: aimant orthogonal à \vec{B} .